Leçon 234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

On se donne $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note λ la mesure de Lebesgue.

1. Définition des espaces L^p et premiers résultats. —

1. *Les espaces $\mathscr{L}^p$.* —

- Def : Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathscr{L}^p(X) := \{f : X \to \mathbb{K}$ mesurable tq $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty\}$. On note alors $\|f\|_p := (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$.
  Et $\mathscr{L}^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{K}$ mesurable tq $\exists M > 0$ **tq** $f \leq_{\mu-pp} M\}$. On note alors $\|f\|_\infty := \inf(\{M > 0$ **tq** $f \leq_{\mu-pp} M\})$.
- Ex : Pour $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage, $l^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_n$ telles que $\sum_n |x_n|^p \leq +\infty$ et $l^\infty(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites bornées.
- Pro : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, et $f \in \mathscr{L}^p(X)$, on a $\|\lambda.f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$, donc $\lambda.f \in \mathscr{L}^p(X)$.
- Inégalité de Minkowski : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
- Pro : Les $\mathscr{L}^p(X)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\|.\|_p$ est une semi-norme.
- Rem : Pour $0 < p < 1$ on aurait une inégalité de la forme $\|f+g\|_p \leq A_p(\|f\|_p+\|g\|_p)$ avec $A_p > 1$. Ainsi, l'application $\|.\|_p$ ne vérifierait pas l'inégalité triangulaire.
- Contre-ex : Pour $X = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda$, la fonction $f(x) = \chi_{\mathbb{N}}(x)$ est de norme p nulle $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, bien que f ne soit pas nulle.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour $f, g \in \mathscr{L}^2(X)$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2.\|g\|_2$.
- Inégalité de Hölder : Pour $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in \mathscr{L}^p(X)$, $g \in \mathscr{L}^q(X)$, on a : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$. Donc $fg \in \mathscr{L}^r(X)$ (Vrai aussi pour $p = \infty$ et $q = 1$).

2. *Les espaces L^p : définition, inclusions, complétude.* —

- Def+Pro : Pour $1 \leq p \leq +\infty$ on définit $N_p(X) := \{f \in \mathscr{L}^p(X)$ tq $\|f\|_p = 0\}$. C'est un s-ev de $\mathscr{L}^p(X)$ qui est l'ensemble des fonctions nulles presque partout.
- Def : On définit $L^p(X) := \mathscr{L}^p(X)/N_p(X)$.
- Pro : Pour $f \in L^p(X)$, $\|f\|_p$ est bien définie, et est une norme.
- Rem : En quotientant l'espace vectoriel par l'ensemble des fonctions de semi-norme nulle, on a obtenu un espace vectoriel normé.
  Pour les $l^p(\mathbb{N})$, ce quotient est trivial car la seule fonction nulle presque partout est la fonction nulle.
- Théorème de Riesz-Fischer : Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(X), \|.\|_p)$ est complet.
  De plus, pour toute suite $(f_n)_n$ de $L^p(X)$ on peut extraire une suite pour laquelle tout choix de représentants dans $\mathscr{L}^p$ converge presque partout.
- Pro : Dans un espace probabilisé (de mesure finie), on a : $f \in L^p \Rightarrow f \in L^q$ $\forall 1 \leq q \leq p$.
  Et $\lim_{p\to\infty}(\|f\|_p) = \|f\|_\infty \in [0, +\infty]$.
- Contre-Ex : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ mais est dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Pro : Si $f \in L^p$ et $f \in L^q$ pour $1 \leq q \leq p$, alors $f \in L^r$ $\forall q \leq r \leq p$.
- Pro : Si $f \in l^p$ alors $f \in l^q$ $\forall p \leq q$. On a la propriété "inverse" du cas d'un espace de mesure finie.

3. *Convergence dans les L^p.* —

- Pro : Si la mesure est finie, pour tous $q \leq p$, on a $\|.\|_q \leq \mu(X)^{\frac{p-q}{qp}}\|.\|_p$. Donc une convergence dans L^p implique une convergence dans L^q.
- Si la mesure est finie, l'inclusion de $L^q(X)$ dans $L^p(X)$ est topologique.
- Théorème de convergence dominée dans un L^p : Soit $f_n \in L^p$ une suite de fonctions dont les représentants convergent μ presque partout vers f. Si il existe $g \in L^p$ tel que $|f_n| \leq_{\mu-pp} g$, alors $f_n \to_{\|.\|_p} f$.
- Contre-ex : $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ converge presque partout vers 0 mais ne converge pas en norme L^p vers 0.
- Pro : La convergence L^p n'implique pas la convergence presque partout si $1 \leq p \leq \infty$. La convergence L^∞ implique la convergence presque partout.
- Contre-exemple pour L^p.
- Contre-ex : Pour $f_n(x) = x^n$ sur $]0, 1[$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ mais $f_n \to 0$ presque partout.
- Rem : Le théorème de Riesz-Fischer donne cependant la convergence presque partout d'une suite extraite.

2. Analyse fonctionnelle dans les L^p. —

1. *Dualité.* —

- Théorème de Riesz : Pour $1 < p < \infty$, il y a un isomorphisme isométrique entre le dual de L^p, $(L^p)'$ et L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
  Le dual de L^1 est isométrique à L^∞ mais le dual de L^∞ n'est pas isométrique à L^1 (il le contient seulement).
  Ainsi, les espaces L^p pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs : $((L^p)')' \simeq L^p$.

2. *Densité.* —

- Théorème : Pour $1 \leq p < +\infty$, $C_c^0(X)$ est dense dans $L^p(X)$ pour $\|.\|_p$.
- Rem : Si une propriété reste vraie par passage à la limite en norme L^p, il suffit alors simplement de la vérifier sur des fonctions continues à support compact, voire plus régulières que cela.
- App : Inégalité de Hardy : Pour $1 \geq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, la fonction $F(f) : x \in R_+^* \mapsto \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)dt$ est bien définie, et $\|F(f)\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
- App : L'opérateur de translation $\tau_x : f(.) \mapsto (f(x + .)$ est continu dans tous les L^p.
- App : Les espaces L^p sont séparables pour $1 \leq p < +\infty$. (On approche avec des fonctions étagées à pentes rationnelles sur des subdivisions rationnelles pour avoir une suite dénombrable dense)
- Pro : $L^\infty(X)$ n'est pas séparable sauf si μ est portée par une sous-partie finie de X.
- Ex : Pour $f_a(x) = \chi_{[0,\frac{1}{a}]}$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$ $\forall a, b > 0$. On a ainsi un nombre non-dénombrable de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$, ce qui empêche la séparabilité.

- Pour $\mathbb{R}$ muni de λ et $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, les fonctions étagées sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$.

3. *Le Hilbert L^2.* —

- Thm : $L^2(X)$ est un espace de Hilbert pour $< f, g >= \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$.
- Théorème de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur $L^2(X)$, il existe $g \in L^2(X)$ tel que $\forall f \in L^2(X)$, $F(f) =< f, g >$.
- Rem : Contrairement au résultat pour tout $1 < p < \infty$, le produit scalaire de L^2 permet de montrer ce résultat bien plus facilement.
- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $f \in L^2(X)$ il existe un unique $p(f) \in C$ tel que pour tout $g \in C$ on ait : $< f - g, p(f) - g >\leq 0$.
- Ex : Problème des moindres carrés.
- Rem : Les propriétés d'espace de Hilbert (orthogonalité, projection sur un convexe fermé, supplémentaire orthogonal, famille orthogonale, convergence faible) permettent de faciliter la démonstration de problèmes portant sur les L^p.
- **Dev** : Théorème de Grothendieck : Soit $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace probabilisé et F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X)$ fermé pour $\|.\|_p$ pour un $1 \leq p < +\infty$.
  Alors F est de dimension finie.

3. Applications diverses des espaces L^p. —

1. *Convolution.* —

- Def : Pour f, g boréliennes positives, on définit $f * g(x) := \int_\mathbb{R} f(y)g(x - y)d\lambda(y) \in [0, +\infty]$.
- Pro : Si ces quantités sont finies, on a $f * g = g * f$ et $f * (g * h) = ((f * g) * h)$
- Inégalité de Young pour la convolution : Pour $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et $f \in L^p$, $g \in L^q$, on a $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$.
- Rem : On peut aussi convoler $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.
- Pro : L^1 muni de * est donc une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- Pro : L^1 ne possède pas d'unité.
- Pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Def : Approximation de l'unité : Une suite $(f_n)_n$ est appelée approximation de l'unité si : $\int_\mathbb{R} f_n(x)d\lambda(x) = 1$, si $f_n \geq 0$, et si $\forall\varepsilon$, $\int_{|x|\geq\varepsilon} f_n(x)d\lambda(x) \to_n 0$.
- Ex : Pour $f(x) = \frac{1}{x^1+1}$, $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}f(nx)$ est une approximation de l'unité.
- Pro : Pour $(f_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in L^1$, $f_n * g \to_{\|.\|_1} g$.
  Si $f_n \in L^q$, cela est aussi vrai pour $g \in L^p$ avec $p = \frac{q}{q-1}$.
- Pro : Régularisation par convolution : Pour f de classe C^k dans L^p et $g \in L^q$ avec $q = \frac{p}{p-1}$, alors $f * g$ est de classe C^k par théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La régularité de la convolée ne porte que sur la régularité d'un seul terme.
- Cor : C_c^∞ est dense dans L^p. (On convole une suite approchant f avec une approximation de l'unité qui soit C_c^∞)

2. *Transformée de Fourier.* —

- Def : Pour $f \in L^1$, $\widehat{f}(x) = \int_\mathbb{R} e^{-ixy}f(y)dy$.
- Pro : $\widehat{f}$ est uniformément continue et bornée par $\|f.\|_1$.
- Ex : Pour $f = \chi_{[-a,a]}$, $\widehat{f}(x) = \frac{2sin(xa)}{x}$
  Pour $f(x) = e^{-|x|}$, on a $\widehat{f}(x) = \frac{2}{(1+x^2)}$.
- Thm : $\widehat{f}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$. (Démontré avec la densité des fonctions C_c^1)
- Pro : On a $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$. La transformée de Fourier linéarise la convolution.
- Pro : Si $x^k f(x) \in L^1$, on a $\widehat{f}(x) \in C^k$, avec $\widehat{f}^{(k)}(x) = (-i)^k \int_R e^{-ixy}y^k f(y)dy$.
- Def : Espace de Schwarz $S(\mathbb{R})$: Les fonctions f de classe C^∞ telles que $x^k f^{(n)}(x) \in L^1$ $\forall n, k$.
- Pro : Théorème d'inversion de Fourier : La transformée de Fourier est une bijection bicontinue sur $S(\mathbb{R})$, et on peut calculer son inverse.
- Rem : Ainsi, la transformée de Fourier est injective sur L^1.
- **Dev** : Théorème de Fourier-Plancherel : Pour $f \in L^1 \cap L^2$, on note $P(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}$.
  Alors $P(f) \in L^2$ et $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2$.
  L'application P se prolonge alors en une isométrie linéaire sur L^2. Cette isométrie est de plus bijective. On peut ainsi prolonger la transformée de Fourier en une application $L^2 \to L^2$.

3. *Les espaces de Hardy et de Bergman.* —

- Ce sont des espaces de fonctions holomorphes auxquelles on rajoute des propriétés d'intégrabilité.
- **Dev** : L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D})\text{ tq}f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|.\|_2$, dont une base orthonormée est la famille des $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}z^n$.
  $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi pour $f(z) = \sum_n a_n z^n$ on a $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.
  L'espace de Bergman possède de plus un noyau de reproduction $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tel que $k_z(.) := \overline{K(z, .)} \in B^2(\mathbb{D})$ $\forall z \in \mathbb{D}$ et tel que $f(z) =< f, k_z >$ $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$.
- Rem : Un espace de Hilbert de fonctions ayant un noyau de reproduction est entièrement caractérisé par celui-ci. Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur $B^2(\Omega)$ grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici. Par exemple, pour tout $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom, l'opérateur $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ est bien défini et continu sur $B^2(\mathbb{D})$.
- On peut aussi définir $B^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p < +\infty$ et ramener certaines études sur les B^p à une étude sur B^2 afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Pour Ω un ouvert simplement connexe, on peut aussi définir $B^p(\Omega)$ grâce à l'existence de $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ biholomorphismes. Cette définition est indépendante de ψ, et $B^2(\Omega)$ va lui aussi être un espace de Hilbert à noyau de reproduction, avec un noyau de reproduction que l'on obtient à partir de celui de $B^2(\mathbb{D})$. On peut ainsi exporter des propriétés de $B^2(\mathbb{D})$ vers $B^2(\Omega)$.

- Def : On définit $H^2(\mathbb{D}) = \{\sum_n a_n z^n \text{ tq } (a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})\}$ l'espace de Hardy du disque.

- Pro : L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour $< f, g >= \sum_n a_n.\overline{b_n}$.
  On a de plus : $< f, g >= lim_{r\to 1^-}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt)$.
  Une base orthonormée de $H^2(\mathbb{D})$ est $z \mapsto z^n$.
- Pro : C'est lui aussi un espace de Hilbert à noyau de reproduction pour $K(z, w) = \frac{1}{1-z\overline{w}}$.

Références

Briane, Pagès : I). Densité des fonctions étagées intégrables. L^2 Hilbert. Convolution. Transformée de Fourier.
Brézis : Théorème de Riesz-Fischer. Théorème de Riesz pour L^p, dualité. Densité de C_c^0, inégalité de Hardy, séparabilité.
Hauchecorne : Contre-Exemple de séries ayant des problèmes.
Zavidovique : Théorème de Grothendieck.(Dev)
Bayen, Margaria : Espace de Bergman.(Dev)
Rudin : Théorème de Fourier-Plancherel.(Dev)

December 27, 2024

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes